

תפיסות מוטעות בתהליך בניית גרפים מייצוגים שונים בסביבה ממוחשבת

ד"ר אסתר קאפח

תקציר¹

המחקר הנוכחי עוסק בשאלות הבאות: כיצד מתמודדים תלמידי כיתה ה עם משימות שרטוט גרפים המתבססות על מיומנויות של מעבר מייצוג מילולי לייצוג גרפי ומעבר מייצוג מספרי לייצוג גרפי (עולה/יורד, מספרי/לא מספרי)? אילו תפיסות מוטעות מגלים תלמידים צעירים במשימות של בניית גרפים? אילו תהליכים קוגניטיביים מלווים תפיסות מוטעות אלה ומהן הסיבות האפשריות להיווצרותן? המדגם כלל 108 נבדקים, 57 תלמידים בקבוצת הניסוי ו- 51 תלמידים בקבוצת הביקורת. התלמידים למדו בארבע כיתות ה' משני בתי ספר יסודיים. בכל בית ספר הכיתות נחלקו אקראית לקבוצת הניסוי שלמדו הבנת גרפים ובנייתם בסביבה ממוחשבת בלוגו, ולקבוצת ביקורת שלמדו הבנת הנקרא בעזרת מעבד תמלילים. הממצאים הצביעו על יתרונה של סביבת לוגו על פני סביבת למידה במעבד תמלילים על יכולתם של הנבדקים להבין גרפים ולבנותם. עיון דיפרנציאלי בסוגי המשימות מראה, כי עיקר הקושי של התלמידים התמקד במשימות השרטוט הדורשות מיומנויות של מעבר מייצוג מילולי לייצוג גרפי, יותר מאשר במשימות שרטוט הדורשות מעבר מייצוג מספרי לייצוג גרפי. כמו כן היה קושי גדול יותר של הנבדקים לשרטט גרף יורד מאשר גרף עולה. אותרו שמונה סוגים של תפיסות מוטעות. הן נדונו בהרחבה מתוך הבחנה בין תיאור התפיסות כפי שהן באות לידי ביטוי בשרטוטים השגויים של התלמידים לבין התהליכים הקוגניטיביים המעורבים בהתהוותן של תפיסות אלה, ומוצעות לכך סיבות אפשריות. מודעות של מורים ומורי מורים לתפיסות מוטעות ולסיבותיהן עשויה לשפר ולכוון את ההוראה, ולמקד את פיתוח תוכניות הלימוד בנושא בניית גרפים ופרשנותם.

¹ החוקרת מודה לאביבית לוי על הערותיה והארותיה.

תפיסות מוטעות בתהליך בניית גרפים מייצוגים שונים בסביבה ממוחשבת

יכולת הבנה ופרשנות של גרפים הם המפתח להתפתחותו העתידית של הפרט ושל יכולתו לעבד אינפורמציה מדעית (דו"ח הוועדה לחינוך מדעי וטכנולוגי, 1992). עם זאת, תלמידים הנדרשים לגלות מיומנויות הבנה בנושא, מתקשים ומפגינים תפיסות מוטעות כמתואר בספרות המחקרית (כגון, קאפח, 1997; Bell & Janvier, 1981; Goldenberg, 1988; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990). העבודה הנוכחית עוסקת בהתמודדות ילדים צעירים בגילי 10-11 עם תהליכי בניית גרפים מסוגים שונים בסביבת למידה ממוחשבת, ומתמקדת בשאלות הבאות: כיצד מתמודדים תלמידי כיתה ה עם משימות שרטוט גרפים המתבססות על מיומנויות של מעבר מייצוג מילולי לייצוג גרפי ומעבר מייצוג מספרי לייצוג גרפי (עולה/יורד, מספרי/לא מספרי)? הבחנה זו בין סוגי הגרפים לא נחקרה בספרות בקרב האוכלוסייה הנדונה. אילו תפיסות מוטעות מגלים תלמידים צעירים, שלא למדו את הנושא באופן פורמלי, במשימות של בניית גרפים מייצוגים שונים? אילו תהליכים קוגניטיביים מלווים תפיסות מוטעות אלה ומהן הסיבות האפשריות להיווצרותן?

תהליכים מנטליים השזורים בפעולות של בניית גרפים מייצוגים שונים

מבט על העצם המתמטי הקרוי גרף מגדירו כאוסף נקודות, הקרויות קדקודים, ומקטעי קוים, הקרויים צלעות, המחוברות נקודות אלה (Hart, Maltas & Rich, 1990). ההפשטה הגרפית מתבססת על הגורם החושי הויזואלי-מרחבי (קאפח, 1993) ותורמת לחשיבה הנומרית בפענוח טבלת נתונים. בהיבט סטטיסטי הגרף הוא ייצוג טבלאי המתקבל מתצפיות על מערך נתונים נגישים למיון, לבחירת כינויי ציר ולהתאמת מבנה. איסוף נתונים, בחירת תצוגה ההולמת את הנתונים ופרשנות של תצוגות אלה, הן כולן מיומנויות נפוצות בעידן האינפורמציה. מיומנויות אלה מהוות תשתית עבודה, אשר תומכות בטווח רחב של פתרון בעיות (Shulte, 1984). חוקרים טוענים, כי תצוגה גרפית מתאימה לסוג אחד של נתונים וחשובים, למשל, גרף עמודות הוא המתאים ביותר להשוואות מורכבות בין ערכים מספריים, איורים ותמונות מתאימים להשוואות פשוטות, גרפים קווים מתאימים לזיהוי ולהשוואת מגמות ואילו לוחות נתונים מתאימים לזיהוי ערכים ספציפיים (Meyer, 1997; Washburne, 1927). אין ייצוג אחד טוב שמתאים לכל הסיטואציות, ולעיתים, אנשים שונים מייצגים בעיה בדרכים שונות. שמה ודריפוס מצאו, כי 75% מן התלמידים בחרו לייצג את הבעיה באמצעות גרפים בבעיות הניתנות לפתרון גם בדרך אלגברית (Shama & Dreyfus, 1994). פרשנות ובנייה של גרפים מערבות שני סוגי אסטרטגיות:

אסטרטגיות סטטיות, המתייחסות למשימה של צפייה בגרף כאוסף של נקודות מבודדות, ואסטרטגיות דינמיות, המתייחסות לצפייה בגרף כמייצג מגמות ודגמים של שינויים (Clement, 1989). אופי הגישה הדינמית מערב שימוש של פרספקטיבה כללית להבדיל מן הגישה הסטטית שהיא יותר מקומית. נהוג למיין את הפעולות הקשורות לגרפים לשני ממדים: ממד א. **פרשנות** ממד ב. **בנייה** (Leinhardt et al. 1990; Wainer, 1992).

א. **פרשנות** (Interpretation) מתייחסת לפעולה של הבנת הייצוג והמשמעות של הגרף, לדוגמא, הבנת תופעה כמותית המוצגת בדרך גרפית על פני מערכת צירים. פרשנות יכולה להיות גלובאלית, כללית או מקומית, ספציפית (Fisher, 1992; Wainer, 1992). כך, תלמיד יכול להחליט על:

1. קצב, לדוגמא, כיצד בקטריה מתרבה כל שעה בטמפרטורה קבועה וכדו'.

2. עקרונות של מגמה, לדוגמא, מה קורה ל-x כאשר y גדל.

3. חיזוי והסקה, לדוגמא, אינטרפולציה או אקסטרפולציה של גרף.

וינר רואה בסוגי החלטות אלה שלוש רמות של פרשנות גרף כאשר חיזוי והסקה על סמך המגמה הנתונה בגרף הינה הרמה הגבוהה ביותר (Wainer, 1992). תהליך פרשנות גרף והבנתו יכול לכלול פונקציות חשיבה שונות כגון, מיון, השוואה, הבנת היחס או הדרוג, הסקת מסקנות והכללה. פרשנות אינה דורשת בנייה, אולם בנייה מתבססת על סוג מסוים של פרשנות.

ב. **בניית גרף** (Construction) מתייחסת לפעולה של יצירת תיאור ויזואלי, או שרטוט נקודות על סמך נתונים. תהליך הבנייה כולל: מיון נתונים לקטגוריות, בחירת ייצוג גרפי תואם, שיום מערכת צירים, ארגון תחום ערכים של הצירים, קביעת היחס או הדרוג של תחום הערכים, קיבוץ נתונים בעת הצורך, זיהוי היחידה ושרטוט הנקודות. תוך כדי תהליך הבנייה מתבצע הליך של היסק אופרטיבי. התלמיד לומד להשתמש במערכת סמבולית אחת, כדי להבין את האחרת. כמו כן, הוא לומד להבחין בין סוגי בנייה שונים, בין בנייה כמותית של גרף המתבססת על הנתונים ובין בנייה איכותנית המתארת מצב ומדגישה את המשמעות שיש לכיוון הכללי של הגרף. משימת בניית גרף, כוללת ארבעה אלמנטים מרכזיים: הסיטואציה (סידור הקונטקסט), מיקוד (לוקאלי, גלובאלי), המשתנים (קטגורי, אנטרוולי, יחס) והפעילות (בנייה, חיזוי, מיון, תרגום ודרוג). נבדקו שבעה רכיבים הקשורים למשימת בניית גרף (Attali & Goldschmidt, 1996). חלקם קשורים במשימה עצמה וחלקם קשורים לגרף, והם: מידת

החידוש, משמעות הצירים, רמת השאלה הקשורה לציר X , רמת השאלה הקשורה לציר Y , מידת המורכבות, חישוב ומשתני הגרף. מבדיקתם עולה שכל שבעת הרכיבים מנבאים את קושי הפריט. משימת בניית גרף הינה משימה מורכבת ותלמידים רבים מגלים קשיים ותפיסות מוטעות כמתואר להלן.

גילויי תפיסות מוטעות בספרות המחקרית

תלמידים מגלים קשיים כאשר הם מתבקשים להחליף בין אופני הצגה שונים. התופעה ניכרת ביתר שאת כאשר נדרשת בניית גרפים. תלמידים יכולים להכיר, לזהות ולמייין גרפים בדרגת קושי גבוהה יותר מאשר אלה, שהם יכולים לבנות או ליצור (Yerushalmy, 1991). תצפיותיה של ירושלמי תוך מעקב אחר ביצועי תלמידים הראו, כי תלמידים פיתחו מספר פתרונות נאיביים ובלתי צפויים באשר לסיווג הגרפים בהשוואות גיאומטריות והשוואות סמליות בין צורות ההבעה כגון, שגיאות בהתאמה בין גרפים לבין הפונקציות שלהם, תלמידים לא הבחינו בין פונקציות לינאריות ללא לינאריות אף לאחר לימוד הנושא בכיתה. הם גילו עניין בגורמים נוספים בתיאור הפונקציות כמו, סימטריה, הטיות, מיקום על הרשת, רציפות לעומת אי רציפות. קשרים אלה הובילו לטעויות שונות. תפיסות מוטעות ניכרות אף בקרב תלמידים מחוננים הלומדים בחטיבה עליונה. הם מגלים קושי לשייך תכונות של גרף לתכונות סמליות מוכרות. גולדנברג מדגים מצבים בהם השפעת התמונה על תשובות התלמידים חזקה יותר מהידע האנליטי. למשל, התלמידים יודעים את התפקיד הסמלי של כל אחד מהפרמטרים בתיאור הפונקציה הריבועית. הם מודעים לגורמים ויזואליים כמו, כיוון הפרבולה (למעלה/למטה), מה מקומה האופקי והאנכי במערכת צירים ועד כמה היא מחודדת (Goldenberg, 1988). עם זאת, נתגלו קשיים בניסיון להתאים לכל אחד מהפרמטרים את התפקיד החזותי שלו. כמו כן, יש תלמידים המתקשים במתן משמעות לפרמטרים השונים (Cieply, 1993).

השימוש בדוגמאות חיות מן העולם שלנו עשוי להשפיע על התמודדות עם תפיסות שגויות מסוג זה, אם כי גם לזה הצלחה חלקית בלבד. לדוגמא, במחקרם של רוזניק וכלימנט נתבקשו סטודנטים לתאר באופן גרפי את הבעיה הבאה (Rosnick & Clement, 1984): "בחוזה יש פי 5 כבשים יותר מאשר פרות", הם קבלו הנחיה מפורשת להשתמש במשתנה C לייצג פרות ובמשתנה G לייצג כבשים. על אף שתלמידים הציגו תשובה נכונה, במהלך הריאיון שינו חלקם את תשובתם והציגו תפיסה שגויה של היפוך השוויון (Error reversal) וחוסר הבנה של המושגים, משתנה ושוויון. לעיתים מפריעים לתלמידים מאפיינים לא רלוונטיים או שהם מתבלבלים בשל גרירה מלאכותית או ויזואלית. לדוגמא גרף המציג מהירות של

מכונית מתחרה כפונקציה של המרחק לאורך מסלול, יכול להיות נתפס בטעות כמסלול מוחשי שמכוניות נוהגות בו, כך שתלמידים מתפתים לפרש את העקומות בגרף כייצוג של פיתולים לאורך מסלול (Bell, 1987). בדוגמא אחרת של ייצוג מהירות זמן דרך ציינו תלמידים כי הגרף מראה טיפוס על הר, תחילה עליה ואחר כך ירידה במדרון. יש ביניהם המבלבלים קריאת גרף עם תמונה או מפה. כך למשל, במקרה של סטודנט בן 28 שהדימויים הקונקרטיים החיים ותוססים במחשבתו היוו מכשול בהבנת הפרבולה (Aspinwall, Show & Presmeg, 1997). בנוסף, תלמידים מבלבלים בין השיפוע לבין הגובה ומחליפים בטעות את ערכי השיפוע בערכי המכסימום או המינימום (Janvier, 1981). ממצאי מחקרים מראים שיש לתלמידים בעיות כאשר יש ליצור מערכת של שני צירים. לדוגמא, תלמידים רבים חשבו שניתן לדרג באופן שונה תחומים שונים של הצירים. לעומתם, תלמידים אחרים חושבים שציר X וציר Y חייבים להיות סימטריים (Leinhardt et al. 1990).

בספרות המחקרית דווח על ארבעה סוגים של תפיסות מוטעות והם: שימור צורה של גרף עולה בכל תנאי, בניית הגרף כנקודה אחת, חוסר הבנה של השתנות בו-זמנית ובלבול בין גרף לבין תמונה (Bell, 1983) et al. 1987; Leinhardt et al. 1990; Markovitz, Eylon & Bruckheimer, 1983) במחקרם של מברך וקרמרסקי (Mevarech & Kramarski, 1997) דווח על שלושה סוגי תפיסות מוטעות בקרב תלמידי כיתות ח והם, בניית גרף שלם כנקודה אחת, בניית סדרת גרפים שכל אחד מהם מייצג נתון אחד מתוך הנתונים ושימור צורה של גרף עולה בכל תנאי. מעניין כי אופן דרוג הנתונים משפיע על היווצרות תפיסות מוטעות (Meyer, 1997). עיקר הקושי של התלמידים הוא בהתמודדות עם רמת ההפשטה הנדרשת בשרטוט גרפים (קאפח, 1997). תלמידים אינם עושים אינטגרציה של ידע ואינם מבצעים טרנספר (העברה) בין ייצוגים שונים של פונקציות הנלמדים מאספקטים שונים (שוורץ, 1989 ע' 26). יש חוקרים התולים את קשיי התלמידים בהבנת פונקציות וגרפים בדימויים מנטליים קיימים במוחם ומהווים הפרעה לראות מצב נתון (Aspinwall et al. 1997). נמצא, כי בדרך כלל גרפים מסייעים לביסוס כישורי תלמידים ובאבחון קשייהם בפתרון בעיות, אך רמת הביצוע יורדת כאשר התלמידים נדרשים לבטא עקרון מכליל (Everd & Uy, 1999). הואיל ולתלמידים יש ראייה מוגבלת של גרפים הנובעת בחלקה ממושגים לא מושלמים שיש להם ובשל החסרון בידע פורמאלי באלגברה. יתר על כן, נשר מסבירה כי תפיסות מוטעות מושרשות פעמים רבות בניסיונם הקודם של התלמידים ביישום אסטרטגיה המתאימה בהקשר אחד אך לא בהקשר אחר (Nesher, 1987). תופעה זו מכונה 'העברה שלילית'.

מערכות ממוחשבות של ייצוגים גרפיים וזיקתן לתפיסות מוטעות

הבנת התלמידים משתפרת כאשר הם עסוקים בלמידה אינטראקטיבית ממוחשבת המבוססת על חקירה יותר מאשר בלמידה המבוססת על זכירה וחישוב. חיזוק לכך ניתן לראות בעבודתן של החוקרות רוזברי ורובין (Roseberry & Rubin, 1989) שעקבו אחר התפתחות חשיבה סטטיסטית בסביבה ממוחשבת הנקראת Elastic. בה ניתן לצפות בדיאגרמות לנתח אותן ואף למתוח את הדיאגרמה ולעקוב אחר השינויים הנוצרים במדדים כמו ממוצע וחציון. העובדה שהתלמידים יכלו לשנות את הגודל והמיקום של הדיאגרמות ובו-זמנית לצפות בשינוי במדדים המרכזיים סייעה לתלמידים ואף למורים לאבחן תופעות, כמו עד כמה החציון מהווה מדד יציב לעומת תכונות הממוצע. יתר על כן, עבודה בסביבה ממוחשבת מקלה על הוראת ייצוגים גרפיים ומציגה הזדמנויות חדשות בעלות אתגר לתלמידים (Goldenberg, 1988). ניסוי אחר בדק כיצד מטפלים בשגיאות אלגבריות באמצעות משוברים מייצוגים גרפיים. הניסוי התאפשר כיון שהגרף משתנה בעת שגיאה ואף מאפשר לראות את מהות השגיאה (Yerushalmy & Gafni, 1991). כל נבדק עבד עם שתי גרסאות תוכנה, עם גרפים ובלעדיהם, כך ניתן היה לעקוב אחר השינוי בשיטת העבודה בכל גרסה. אלה שהיו מסוגלים לנצל מידע העולה מן הגרף להבנת המבנה האלגברי של ביטוי נתון שגוי, שגו פחות וביצעו פישוט בדרכים קצרות. מגוון התנהגויות יכולות להיות חבויות כאשר גרפים מוצגים על סקאלה אחת. אולם, כדי להגביר תובנה חשוב להציג גרפים בסקאלות שונות. בכך מסייעים לנו המחשבים והמחשבוניס הגרפיים. תוכניות מודל ממוחשבות המספקות משוב וזיזואלי, משמשות אתגר לתלמידים, מגלות את חשיבות הדרוג בגרפים ומקלות על תובנה (Brown, Fell, Proulx, 1993; Donley & George, 1993; Rasala, 1992). יתרה מזו, הביצועים בסביבת מיקרו עולם מאפשרים פרשנות של פעולות התלמידים (Schwarz, 1989). בניית גרפים בסביבות קונקרטיות כמו, לוגו יכולות לתמוך בבניית מושגים מתמטיים בקרב התלמידים כך שהעיסוק במתמטיקה מופשטת לא יהיה זר להם (Schultz, 1991).

מורים וחוקרים העוסקים בהוראת שפת לוגו מכירים את הפוטנציאל הגלום בשפה זו לשיפור תהליכים של פתרון בעיות (כגון, Papert, 1980; Mevarech & Kapa, 1996; Lehrer, 1986; Kapa, 1999). נמצא כי סביבת לוגו מאפשרת התנסות באיתור טעויות ופירוק בעיה לגורמים תוך עיסוק מהנה בגרפיקת הצב. שפת הלוגו מזמנת למורה סביבת הפעלה דינמית לתלמידיו ומאפשרת שימוש בשיטות הוראה המסייעות בקירוב הלומדים לשרטוטים הגרפיים (Addicks, 1985; Haigh, 1989). באמצעות תכנות גרפים בלוגו תלמידים רוכשים מיומנויות בפירוק בעיות מורכבות לתת-בעיות. ממד נוסף הוא היכולת לבצע רוטציות

של הצורות ואגב כך לאפשר לילדים לגלות תגליות חדשות (Brown, 1985). שפת לוגו מאפשרת את הבנת הייצוג של הידע המתמטי ומטפחת את יכולת ההכללה והארגון של הידע הנרכש (Lehrer, 1986). נושאים רבים ניתנים להוראה בדרכים מגוונות, לדוגמא משימות שמערבות שרטוטים, השלמת טבלה, מציאת התבנית, הכללה, התאמת הכלל לתבנית ובדיקת הכלל (Hart, Maltas & Rich, 1990). נמצא, כי סביבת למידה ממוחשבת בשפת לוגו משפיעה סימולטנית על הבנת גרפים, מטה-קוגניציה ומקוריות (Mevarech & Kapa, 1996). כמו כן, נמצא כי סביבת לוגו תורמת לשיפור יכולת התכנון הויזואלי-מרחבי של תלמידים (Kapa, 1999) ויכולתם לאתר מגמות כלליות של הגרף, להרחיב את האינפורמציה המוצגת בגרף, לזהות נקודות קיצוניות בנוף הגרפי ולהבחין בין גרפים המתארים תופעות שונות של המציאות (Linn, Layman & Nachmias, 1987). יתרה מזו, הפעלת הצב בלוגו טומנת בחובה מתן משוב מיידי וויזואלי ברמת עבודה של פקודות ישירות לצב או משוב מושהה ברמת עבודה של הליכים ותת-הליכים. על ערכו של המשוב הויזואלי ללמידה אנו למדים ממחקרו של ריבר שמצא כי משוב ממוחשב גרפי יעיל יותר ממשוב ממוחשב טקסטואלי (Rieber, 1996). לכן, נבחרה שפת הלוגו כסביבת למידה ממוחשבת להפעלת התוכנית הנוכחית.

תוכנית הלמידה הממוחשבת לבניית גרפים

תוכנית הלמידה המוכרת בשם: "סטטיסטיקה בעזרת לוגו" (מברך וקרמרסקי, 1989), שהינה תכנית לימודים חד-שנתית המתמקדת בהוראת סטטיסטיקה בעזרת הצב. בשלב ראשון התלמידים למדו לקרוא ולהבין גרפים, שאספו מן הפרסומים והעיתונים באותם הימים. בשלב שני התלמידים למדו לתכנת גרפים מייצוגים שונים בעזרת שפת לוגו. הם אספו נתונים בתחומי התעניינותם, אירגנו את הנתונים בטבלאות וייצגו אותם על ידי גרפים. כל תלמיד בנה "עולם זוטא" של מערכת צירים וגרפים מסוגים שונים: נקודות, מוטות, מלבנים, פוליגון, עוגה ופיקטוגרמה. למשל, ניתנה המשימה הבאה לתלמידים במהלך הלמידה "בנו הליך מוטות המתאר את שכיחות הילדים בעלי צבע עיניים שונה בכיתתכם" (ראו דוגמא להתמודדות תלמידים עם משימת בניית פיקטוגרמה של שכיחות התלמידים בכיתה אשר נולדו באותו חודש, בנספח 1). סביבת הפעילות בלוגו מזמנת תפעול של אסטרטגיות חשיבה קוגניטיביות ומטה-קוגניטיביות הניתנים למיון בארבעה תחומים:

א. רכיבי רכישת ידע - היבט התוכנה, רכישת מערכת סמלים ויצירת הבחנות קטגוריאליות ביניהם כגון, מושגי התקדמות המתבססים על אומדנים של גודל (FD BK), מושגי פנייה מתבסס על חישובי גודל

הפנייה או הזווית (RT LT), מושגים דינמיים הדורשים ערך מספרי כגון, FD BK RT LT SETH, מושגים סטטיים ללא ערך מספרי כגון, PU PD PE POTS, מושגי הכללה כמו, REPEAT, שימוש במשתנים וכן הכרת העורך (אדיטור) של לוגו. כאשר מדובר במשימות מורכבות, אופי המשימה ועולם התוכן שלה מכתוב את סוג הפונקציה החשיבתית הנדרשת. יש משימות הדורשות מן הלומד לגלות יכולת תכנון, אחרות דורשות ממד של יצירתיות, ממד של אוריינטציה מרחבית, שימוש אינדוקטיבי, אריתמטי, היקשי, דדוקטיבי, אנליטי וכיו"ב.

ב. רכיבי ביצוע, הלומדים נדרשים לתת תיאור מילולי של "טקסט" בלוגו, לבצע חיזוי התוצר של תמליל נתון בלוגו בפקודות ישירות או בהליכים, לאתר הליך ראשי בסדרת הליכים, ליצור רצף פעולות תוך מודעות לתוצר הסופי שיתקבל, לשיים הליכים ותוכניות, לכתוב תוכנית מורכבת המתבססת על בחירת מושגים רלבנטיים, שימוש בהכללות לפי הצורך, הקפדה על כללי תחביר לוגו, וקישור בין ידע חדש לידע קודם.

ג. רכיבי-על מטה-קוגניטיביים, הלומדים נדרשים לפקח על הבנת תפקודי פקודות, הליכים ותת-הליכים, לפקח על רמת הביצוע, לנקוט אסטרטגיות תיקון כגון, מיפוי, איתור שגיאות (Debugging), עריכה מחדש, הפעלה ניסויית, הפקת לקחים והערכה מסכמת. כמו כן, נדרשים התלמידים לשאול שאלות חקר לכל אורך תהליך הפיקוח (ראו הרחבה אצל קאפח, 2002).

ד. תהליכי תכנון, התלמידים נדרשים לייצג שני סוגים של הליכי תכנון, האחד מן הפרט אל השלם (Bottom-up), והשני מן הכלל אל הפרט (Top down).

מחקרים שערכו השוואה בין שתי סביבות טכנולוגיות פתוחות על פי ארבעת התחומים שנמנו לעיל, סביבת לוגו וסביבת מעבד תמלילים עם ייצוגי טקסט תואמים לכל אחת מן הסביבות, מצאו שסביבת לוגו עלתה על סביבת מעבד תמלילים בטיפוח חשיבה מתמטית בהקשר של הבנת גרפים ופרשנותם, בעידוד השימוש ברכיבי-על מטה-קוגניטיביים ובטיפוח מקוריות (Mevarech & Kapa, 1996), גם הממד של פיתוח הליכי תכנון ורכיבי שליטה בפתרון בעיות ניכר באופן סטטיסטי בסביבת לוגו יותר מאשר בסביבת מעבד תמלילים (Kapa, 1999).

במחקרים אלה ואחרים שצוינו לעיל לא נבדק משתנה בניית גרפים תוך הבחנה בין סוגים שונים (עולים/יורדים, מספריים/לא מספריים) ולא הושם דגש על ניתוח איכותי של תפיסות מוטעות כפי שהן משתקפות בשרטוטים השגויים שהציגו נבדקים צעירים. יתכן, כי העובדה קשורה בכך שאין הנושא נכלל בתוכנית הלימודים הפורמלית בבתי הספר היסודיים בשכבה ה. העובדה הנוכחית מתמקדת בהתמודדות ילדים צעירים בגילי 10-11 עם תהליכי בניית גרפים מסוגים שונים בסביבת למידה ממוחשבת בלוגו,

ומתמקדת בשאלות הבאות: באיזו מידה מתמודדים תלמידי כיתה ה עם משימות שרטוט גרפים המתבססות על מיומנויות של מעבר מייצוג מילולי לייצוג גרפי ומעבר מייצוג מספרי לייצוג גרפי (עולה/יורד, מספרי/לא מספרי)? אילו תפיסות מוטעות מגלים תלמידים צעירים במשימות של בניית גרפים מייצוגים שונים? אלו תהליכים קוגניטיביים מלווים תפיסות מוטעות אלה ומהן הסיבות האפשריות להיווצרותן?

השיטה

המדגם

במחקר השתתפו 108 נבדקים (57 תלמידים בקבוצת הניסוי ו - 51 בקבוצת הביקורת) מארבע כיתות ה בגילי 10-11 בשני בתי ספר יסודיים אינטגרטיביים בגוש דן, שמנהליהם הסכימו לקבל את תנאי הניסוי. בכל בית ספר הכיתות נבחרו באופן אקראי וחולקו אקראית לקבוצת ניסוי ולקבוצת ביקורת. המורים שלימדו בכיתות הניסוי היו מורות מקצועיות להוראת מתמטיקה ממין נקבה. הן צברו מעל 10 שנות ניסיון בהוראת מתמטיקה. אולם, הן לא לימדו את הנושא לפני כן. המורות שלימדו בקבוצת הביקורת היו מחנכות שלימדו הבעה, הבנת הנקרא ולשון עברית. טרם הפעלת הניסוי המורות עברו השתלמות להכרת תוכנית הלמידה הממוחשבת כמתואר להלן.

כלי המחקר - מבחן הבנת גרפים ובניית גרפים (קאפח, 1993)

מטרת המבחן היא לבדוק את יכולת התלמידים לפרש ולבנות גרפים. המבחן כולל 24 פריטים. לתשובה נכונה ניתן ציון 1 ולתשובה לא נכונה ניתן ציון 0. טווח הציונים במבחן זה הינו 0-24. מקדם מהימנות של המבחן 0.88. (אלפא קרונברך). המבחן עובד על פי מבחנם של מברך וקרמרסקי (1989) והותאם לאוכלוסיית המחקר על ידי החוקרת לאור ממצאי מחקר חלוץ. פריטי המבחן מחולקים לשני חלקים: פרשנות ובנייה. חלק א' בנוי מ- 20 פריטים מסוג רב-ברירה, שעניינם פרשנות של גרפים. העבודה הנוכחית מתמקדת בחלק ב של המבחן. חלק ב' בנוי מ- 4 שאלות בנייה; שתי שאלות הציגו נתונים מספריים אותם התבקשו התלמידים לייצג בצורת גרף, כאשר אחת המשימות התייחסה לגרף עולה והשנייה לגרף יורד. שתי השאלות האחרות תארו תופעות באופן מילולי, כאשר אחת המשימות התייחסה לגרף עולה והשנייה לגרף יורד. משימות הבנייה לפי סדר הצגתן בשאלון הן: א. "ארבעה תלמידים שוחחו ביניהם. יוסי אמר שכאשר הוא לומד 3 שעות הוא מקבל ציון 60, כאשר הוא לומד 4 שעות הוא מקבל ציון 70 וכאשר הוא לומד 5 שעות הוא מקבל ציון 90. שרטט גרף המתאר את דברי יוסי". משימה זו תיקרא להלן בנייה א -

גרף עולה מספרי. ב. "רבקה אמרה שכאשר היא לומדת שעתיים היא מקבלת ציון 90, כאשר היא לומדת 3 שעות היא מקבלת 80, וכאשר היא לומדת 5 שעות היא מקבלת 60. שרטט גרף המתאר את דברי רבקה" - גרף יורד מספרי. ג. "דני טען שככל שהוא לומד יותר שעות הוא מצליח יותר. שרטט גרף המתאר את טענתו של דני" - גרף עולה לא מספרי. ד. "גלית טענה ככל שהיא מתכוננת יותר למבחן היא מצליחה פחות. שרטט גרף המתאר את טענתה של גלית" - גרף יורד לא מספרי. התיאור הגרפי נעשה על נייר חלק בעזרת עפרון וסרגל (לא באמצעות מחשב). ניתוח גורמים Factor analysis שנערך על ציוני הקדם של השאלון, הצביע על כך שארבעת שאלות הבנייה מהוות פקטור אחד. השונות המוסברת ע"י פקטור זה הינה 83%.

הליך המחקר

לפני הפעלת תוכנית הלמידה נבדקו כל התלמידים במבחן המתואר לעיל. לאחר הבדיקה המורות של קבוצת הניסוי הפעילו את התוכנית: "סטטיסטיקה בעזרת לוגו" (מברך וקרמרסקי, 1989). המורות של קבוצת הביקורת לימדו הבנת הנקרא באמצעות פעילויות במעבד תמלילים. הלימוד בשתי קבוצות המחקר התבצע במשך שמונה חודשים, שעתיים בשבוע כאשר שעה אחת הוקדשה לעבודה במעבדת המחשבים והשנייה להצגת יחידות הלימוד בכיתת האם. ההוראה בכיתת האם נעשתה באופן פרונטלי. עורכת המחקר צפתה בשיעורי המעבדה ובכיתות הלימוד בקביעות לאורך כל תקופת הניסוי על מנת לוודא שהמחקר מתנהל כמתוכנן. בתום תקופת הלמידה נבחנו כל התלמידים שנית במבחן המתואר לעיל.

בנוסף רוכזו כל השרטוטים השגויים של תלמידי קבוצת הלוגו. הם נותחו וסווגו תוך הסתייעות בקטגוריות שנמצאו בספרות. לקטגוריות אלה נוספו קטגוריות מוצעות חדשות על-פי המחקר הנוכחי. נערך אימות של הסיווג על ידי פעולה מקבילה של שני 'שופטים' נוספים מתחום המתמטיקה. כמו כן, השיפוט התייחס לשיום של הקטגוריות השונות. היו חילוקי דעות לגבי שיום התפיסות הראשונה והשמינית. ניתנו הצעות שונות עד אשר התקבלה הסכמה לגבי השם המוצע בזה. לא היו חילוקי דעות לגבי סיווג השרטוטים השונים לתפיסות המוטעות, זאת, כנראה, מאחר ותיאור התפיסה המוטעית נצמד לעולה מן השרטוטים השגויים.

הכשרת המורים להוראת תוכנית ההתערבות

לפני הניסוי ובמהלכו השתתפו המורות בהשתלמות שכללה הכרת הכלים הפתוחים: (עיינו הגדרתו של גבעון, 1996 למושג 'כלים פתוחים') שפת לוגו ומעבד תמלילים. נושאי ההשתלמות התמקדו בשני

תחומים מרכזיים: האחד היה הכרת הכלי הממוחשב והפונקציות השונות שלו, והשני עסק בתחום התוכן הנלמד באמצעות הכלי הממוחשב. המורים השתתפו בשישה מפגשים של שלוש שעות כל אחד. ההשתלמות נערכה על ידי החוקרת המיומנת בהוראה באמצעות מחשב ובכללם שפת לוגו ומעבד תמלילים.

תוצאות ודיון

בוצעו שלושה סוגי ניתוחים על נתוני המחקר: א. ניתוח שונות במדידות חוזרות על שתי קבוצות המחקר, קבוצת לוגו לעומת קבוצת מעבד תמלילים ששימשה כקבוצת בקורת. ב. ניתוח שכיחות התלמידים בקבוצת הניסוי, שפתרו נכון את משימות הבנייה לפני הלמידה ולאחריה. ג. ניתוח איכותי של התפיסות המוטעות כפי שבאו לידי ביטוי בשרטוטים השגויים של תלמידי קבוצת הניסוי.

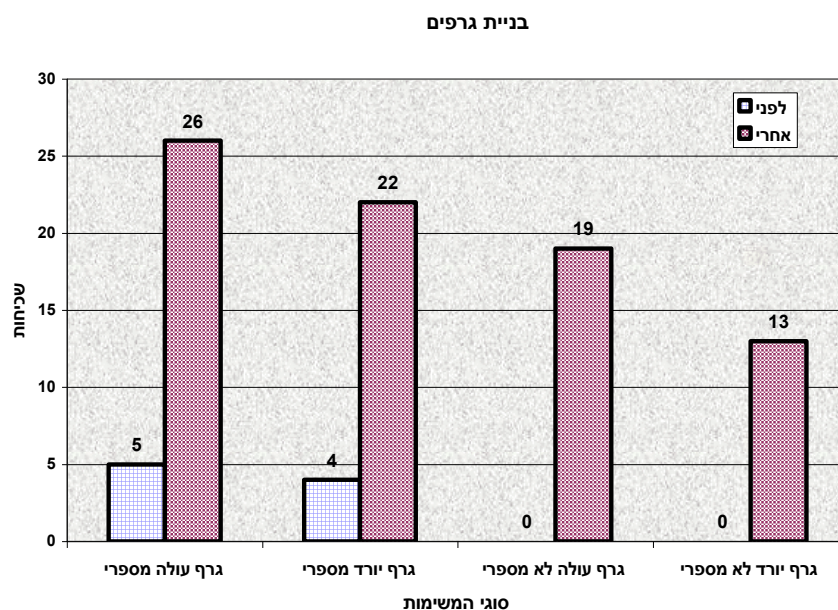
א. ניתוח שונות במדידות חוזרות

ראשית, נערך ניתוח שונות במדידות חוזרות (ראו לוח מפורט בנספח 2). המינוח טיפול מתייחס לתוכנית הלמידה בלוגו ($n=57$) לעומת תוכנית למידה בעזרת מעבד תמלילים ($n=51$), ומינוח הזמן מתייחס לנקודות המדידה לפני הטיפול ולאחריו. ניתוח זה הראה כי האינטראקציה טיפול * זמן מובהקת סטטיסטית בכל אחת משאלות הבנייה. בנייה א שהתייחסה לייצוג נתונים מספריים בעזרת גרף עולה ($p=.01$), בנייה ב שהתייחסה לייצוג נתונים מספריים בעזרת גרף יורד ($p=.0025$), בנייה ג שהתייחסה לייצוג מילולי בעזרת גרף עולה ($p=.02$) ובנייה ד שהתייחסה לייצוג מילולי בעזרת גרף יורד ($p=.0014$). כלומר, סביבות הלמידה השונות השפיעו בצורה שונה לאורך זמן על הישגי התלמידים בבניית גרפים. מבחן דנכן הצביע על יתרונה של סביבת למידה בלוגו על פני סביבת למידה במעבד תמלילים. הניתוחים הבאים התמקדו בקבוצת הלוגו על מנת לתת מענה לשאלות המחקר הנוכחי.

ב. גרפים מייצוגיים שונים

יובאו נתוני התפלגות הנבדקים (ראו איור 1) באופן דיפרנציאלי על פי משימות הבנייה השונות לפני הלמידה ולאחריה על מנת לקבל תמונה כוללת על מידה ההצלחה של תלמידי כיתות ה בקבוצת הניסוי ($n=57$) להתמודד עם משימות בניית גרפים מייצוגיים שונים. איור 1: מציג את שכיחות הנבדקים שפתרו נכון את משימות הבנייה בעלות מיומנויות קוגניטיביות שונות לפני הלמידה ולאחריה.

איור 1 מראה, כי יכולת ההתמודדות של התלמידים עם משימות בניית גרפים גדלה בתום הפעילות עם תוכנית הלמידה הממוחשבת בלוגו, שכיחות השרטוטים הנכונים עלתה מ- 9 (5 שרטוטים נכונים בלבד



לבניית גרף מספרי עולה ו 4 שרטוטים נכונים בלבד לבניית גרף מספרי יורד) ל- 80 שרטוטים נכונים (ראו איור 1). ההבדל בשכיחות השרטוטים הנכונים בין שני זמני המדידה נבדק על ידי מבחן ח'י בריבוע

$$\chi^2 = 69.18; df = 1; p = .001$$

עיון דיפרנציאלי במשימות הבנייה השונות (ראו איור 1) הצביע על 39.47 אחוזי הצלחה בהתמודדות עם שרטוט גרף עולה (בנייה א ובנייה ג) לעומת 30.7 אחוזי הצלחה בהתמודדות עם גרף יורד (בנייה ב ובנייה ד). עוד נמצא, כי 42.1 אחוזי הצלחה ניכרו בהתמודדות עם הפיכת ייצוג מספרי לייצוג גרפי (בנייה א ובנייה ב) לעומת 28.07 אחוזי הצלחה בהתמודדות עם הפיכת ייצוג מילולי לייצוג גרפי (בנייה ג ובנייה ד).

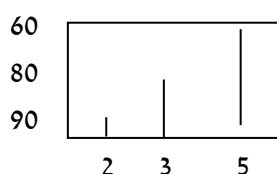
בחישוב גודל האפקט לאחר הניסוי, לפי Cohen's d (המחושב כיחס בין הפרש הממוצעים לבין סטיית התקן הממוצעת, Cohen, 1977), נמצא אפקט בינוני בהשוואה בין בנייה א ל-ג ובין בנייה ב ל-ד ($d = .27$), אפקט בינוני חלש בהשוואה בין בנייה א ל-ב ($d = .23$), ואפקט גבוה מאוד בהשוואה בין בנייה ג ל-ד ($d = 1.24$). כלומר, האפקט הגדול ביותר נמצא בהבדל בין ייצוג מילולי ללא נתונים מספריים בעזרת גרף עולה לבין זה המתאר גרף יורד.

ג. ניתוח איכותי של שרטוטי הגרפים השגויים

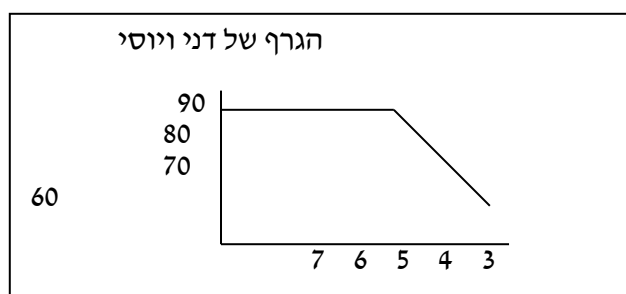
יוצגו התפיסות המוטעות שהתבטאו בשרטוטים השגויים של תלמידי קבוצת הניסוי לאחר הלמידה. כמו כן, יוצג ניתוח קוגניטיבי בהתאמה לסוג התפיסה המוטעת תוך הצבעה על מקורות אפשריים להתהוותן. ניתוח הטעויות מתייחס לביצועי התלמידים לאחר הלמידה בלוגו כיוון שלפני הלמידה כל התלמידים הגישו דפים ריקים באשר למשימות הבנייה המילוליות הלא מספריות (ג-ד) וכן 91%-93% לא הצליחו להתמודד עם משימות הבנייה המספריות (א-ב) והגישו דפים ריקים. יש להדגיש כי מדובר באוכלוסית תלמידים רגילה ולא בתלמידי החינוך המיוחד, ועל-כן חוסר ההתמודדות הגורף טרם הלמידה, יש בו כדי להעיד על מורכבות הנושא. לעומת זאת, אחרי הלמידה רק 21% (12 תלמידים) לא שרטטו גרפים כלל אף לא באחת משאלות הבנייה. שרטוטי התלמידים כללו מגוון של גרפים: גרף לינארי, גרף מוטות, מלבנים, נקודות מבודדות על פני מערכת צירים וגרפים שגויים למיניהם. עיון בשרטוטי הגרפים השגויים של התלמידים מעלה מגוון של תפיסות מוטעות אותם ניתן לסווג בדרוג יורד כדלקמן:

א. היפוך נתוני הסקאלה של הציר האופקי או של הציר האנכי

איור 2: מציג גרפים על פני מערכת צירים בהם חל היפוך נתוני הסקאלה של הציר האופקי או של הציר האנכי באופן שמגמת הגרף המתקבל מעוותת או הפוכה.



הגרף של רבקה



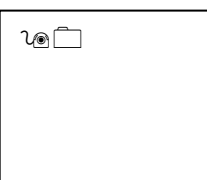
13.9 אחוז מן השרטוטים השגויים הראו היפוך הנתונים על פני הסקאלה, כאשר בחלק מהם הוצגה

סקאלה הפוכה של ציר X ובחלק מהם ההיפוך הוצג בציר Y , באופן שמגמת הגרף המתקבל מעוותת או הפוכה. לדוגמא, ראו את הגרף של רבקה באיור 2. גרף מסוג זה ההתאמה בין ציר X לציר Y נכונה לגבי כל נקודה בפני עצמה, אולם, היפוך נתוני הסקאלה של ציר Y יצר גרף עולה, המשקף מגמה הפוכה למגמה האמיתית של ירידה בהישגים עם עליה במשך הלימוד. דוגמא נוספת לתופעה זו ניתן לראות בגרפים של דני ויוסי באיור 2. ניתן, אולי, להקביל סוג זה של טעויות לשגיאות היפוך, שמצאו רוזניק וכלימנט במחקרם בקרב סטודנטים בקולג' (Rosnick & Clement, 1984).

התלמיד מבטא תפיסה מוקדמת של צורת הגרף היוצרת אילוצים לגבי דרוג נתוני הצירים. הצורך של התלמיד לשמור על דגם מסוים של הגרף, הניע תלמידים אחדים לבנות באופן שיטתי גרף לינארי עולה בכל אחד מארבעת המקרים המתוארים במשימות הבנייה. נראה, כי הדבר נובע מחשיפת יתר לתבנית הגרף הקווי העולה ואי-חשיפה מספקת לתבניות שונות של גרפים והדרך בה הם מייצגים מידע. מסתבר שתלמידים אינם מבחינים בין גרף לינארי ולא לינארי (ראו, Yerushalmy, 1991). תופעה זו נמצאה אף בקרב תלמידים בוגרים, למשל, תלמידי חטיבות הביניים במחקרם של מרקוביץ' וחבריו (Markovitz et al. 1983). יש המסבירים תפיסה זו כנובעת מהכללת יתר של הכלל הגיאומטרי: "דרך שתי נקודות עובר רק קו ישר אחד" (Mevarech & Kramarski, 1997).

ב. תפיסת הגרף כצורה טבלאית

איור 3: מציג גרפים כטורי מספרים מקבילים או כטבלאות מספרים.

יוסי		דני	
שעות	ציון	שעות	ציון
5		3	100
4		2	60
3		1	20

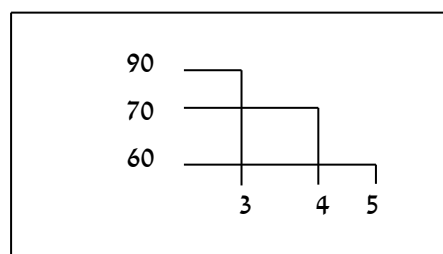
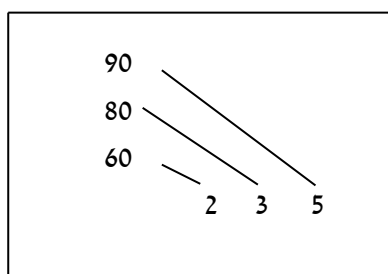
7.4 אחוז מן השרטוטים השגויים של התלמידים ייצגו גרפים כטורי מספרים מקבילים או כטבלת מספרים, ראו דוגמאות להישגי דני ויוסי באיור 3 המוצגים בצורה זו. יש שהוסיפו קוים המחברים בין שני טורי המספרים כמו בדוגמא של דני. אחרים הוסיפו עמודות צבע בין הטורים המקבילים. בדוגמאות מסוג זה יש התאמה נכונה בין שני הממדים של הנתונים, אולם אין הצגה שלהם כנקודות במרחב

הגיאומטרי הדו-ממדי.

תפיסה זו חושפת ליקוי בתרגום המידע הנומרי להצגה גרפית חזותית של נקודות במרחב גיאומטרי דו-ממדי. תלמידים מתקשים בתפיסת הגרף המתאר השתנות משותפת של המשתנה בציר האופקי עם המשתנה בציר האנכי. גם ג'אנביי עמד על תופעה זו בעבודתו עם תלמידים (Janvier, 1981). יתכן, שלתלמיד מפריעים מאפיינים לא רלוונטיים כאשר הוא נדרש להציג אינפורמציה מרחבית, או שעודנו שבוי בכבלי התפיסה המתמטית הקונקרטית המעכבת את המעבר לחשיבה המתמטית המרחבית המופשטת. בהתייחס לשלושת רמות פרשנות הגרף של וינר (Wainer, 1992) לגבי תפיסה זו, התלמיד עדיין לא הגיע לרמה הבסיסית הראשונה. יתכן שתלמידים עושים אנלוגיה שגויה למשימות של פתרון בעיות בהם נתבקשו להציג נתונים בטבלאות התאמה.

ג. תפיסת הגרף כהתאמה גרפית בין ערכי ציר X ו- Y , חיבור נקודות קרטזי בלבד

איור 4: מציג גרפים כהתאמה גרפית בין ערכי ציר X ו- Y , חיבור נקודות קרטזי בלבד.



4.6 אחוז מן השרטוטים השגויים מציגים את הגרף כאוסף של קווי התאמות ערכים מציר אחד לשני כלומר, מתיחת קווים בין נקודה בטווח לנקודה בתחום, במקום להציג קו יחיד המתאר את מגמת אוסף זוגות הערכים. לדוגמא, יש נבדקים שמתחו קווים או קשתות בין הזמן לציון התואם (ראו איור 4). בדוגמאות מסוג זה לא ניתן לראות גרף המשקף קשר כמותי בין מספר השעות המוקדש ללימוד לבין רמת ההישגים (הציון). חוקרים אחדים מתארים תפיסה מוטעית זו כחוסר הבנה של השתנות בו-זמנית (Bell et al. 1987; Markovitz et al. 1983). תופעה זו נובעת כנראה מן העובדה שתלמידים יש מושגים לוקים בחסר על מהותו של גרף ולכן אינם בשלים לבנות גרף המשקף קשר כמותי בין מערכות נתונים. במקרה זה מושג השיפוע כיחידה מקשרת בין אלמנטים ובין נקודות בודדות הינו מושג קשה

יחסית להשגה, לא כל שכן, תפיסת הקשר בין השיפוע והסימן, כלומר, הבנת הסימן כמעיד על כיוון: סימן חיובי - גרף עולה, סימן שלילי - גרף יורד. יש בתפיסה מוטעת זו אנלוגיה קוגניטיבית שגויה למשימות שגורות, הדורשות מהתלמידים למתוח קווים בין המספר בטור א' לבין הכמות המתאימה בטור ב'. אף בקונטקסט המדעי יש מורים המקפידים לדרוש מתלמידיהם למתוח קווים בין נקודה בתחום לבין נקודה בטווח.

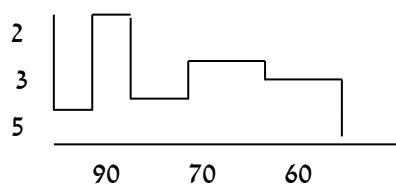
ד. הצגת גרף כנקודה אחת על פני מערכת הצירים
איור 5: מציג גרף כנקודה אחת על פני מערכת הצירים.



2.8 אחוז מן השרטוטים השגויים של התלמידים הציגו את הגרף כנקודה בודדת ולא מסרו תיאור גרפי המתייחס לכלל הנתונים שהוצגו במשימה לדוגמא, הישגיו של יוסי נראים כך בחלק מעבודות התלמידים. בדוגמא זו אף ההתאמה של נתוני ציר X וציר Y עבור נקודה זו אינה נכונה (ראו איור 5). נראה, כי בתפיסה מוטעת זו מתגלה ליקוי בהתייחסות סימולטנית אל מערכת קואורדינטות אורתוגונלית (בעלת ציר אופקי וציר אנכי ניצבים זה לזה) כמייצגת ריבוי פריטי מידע, כמו כן, מתגלים קשיי התלמידים בשימור המאפיינים הקבועים, למרות שינויים במאפיינים אחרים. תופעה זו נצפתה על ידי חוקרים נוספים בקרב אוכלוסיות חטי"ב וחט"ע כגון, לינהרדט וחבריה (Leinhardt et al. 1990) ומברך וקרמרסקי (Mevarech & Kramarski, 1997). יתכן, כי בשל עומס קוגניטיבי תלמידים נוטים לתפוס את הגרף כאוסף של אירועים בודדים ועל כן מבטאים חוסר יכולת לשרטט גרף רציף המצביע על מגמה כלשהי. מורכבות הגרף ודחיסותו כמייצג מידע מביאה תלמידים לנסות 'לדלל' את המידע כדי להתמודד עם דחיסות זו. ממצא זה תומך בטענה שתלמידים יכולים לבצע בהצלחה בניית גרף פשוט, אך רמת הביצוע יורדת כאשר התלמידים נדרשים לבטא עקרון מכליל (Everd & Uy, 1999).

ה. תפיסת הגרף כאיור

איור 6: מציג גרף כאיור.

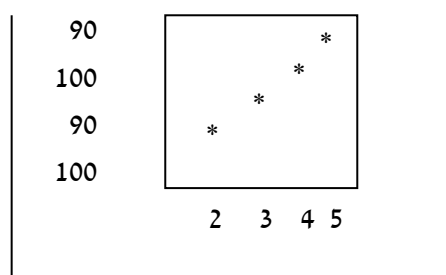


1.9 אחוז מן השרטוטים השגויים הראו גרף כאיור איכוני, כאשר הקישורים הקיימים בגרף שרירותיים ולא מתאימים לנתונים, לדוגמא, ראו הישגי יוסי המוצגים באיור 6.

בתפיסה זו יש סטייה מהבנת מערכת צירים קרטזית דו-ממדית כמערכת האמורה להגדיר מקומה של נקודה במרחב. יתכן שתפיסה זו נובעת מתוך הצורך של התלמיד להיאחז במציאות המוחשית באמצעות יצירת גרף אנלוגי על ידי גרירה מלאכותית ויזואלית בלתי מודעת לתופעות בטבע. ההפשטה הנדרשת בייצוג הגרף שהנו חזותי ואף על פי כן, מופשט מקשה על תלמידים. ניתן לראות כאן סממן של פעילות מודרכת על פי האינטואיציות של התלמיד. אינטואיציות הם המאפיינים של ידע התלמיד הנובע מניסיון היום יום (Yerushalmy, 1991). תופעה זו מוכרת בספרות המחקרית. ידועה למשל עבודתם של לינהרדט וחבריה (Leinhardt et al. 1990) שמצאו את הסיבוך האיכוני כאשר ראיונו תלמידים מכיתה ח. חוקרים נוספים ציינו, כי תלמידים מתפתים לפרש עקומות בגרף המציג מהירות של מכונית כייצוג של פיתולים לאורך מסלול במציאות (Bell & Janvier, 1981; Bell et al. 1987). יתכן, שזהו שלב בהתפתחות הבנייה הגרפית בקרב ילדים צעירים ואפשר לראות בכך מעבר מתפיסה מרחבית ציורית לתפיסה מופשטת של קשר בין שני משתנים.

ו. עיוות סולם המדידה

איור 7: מציג גרף המתבסס על עיוות סולם המדידה.



ב- 0.9 אחוז של השרטוטים השגויים נמצא עיוות של סולם המדידה. לדוגמא, הסקאלה של דני בנויה מזוג ערכים החוזר על עצמו (ראו איור 7).

נראה שתפיסה מוטעית זו נובעת מליקוי בהבנת פעולת הדרוג והשיום של מערכת צירים. פעולה זו דורשת תשומת לב לצירים ולסולמות המיוצגים וליחידות הנמדדות. למשל, תלמיד צריך לקבל החלטה אם מספר היחידות שהפסקה מייצגת הוא 1, 2, 3 וכו', והאם להשתמש בשני הצירים באותו דרוג או בדרוגים שונים. תלמידים לעיתים נוטים לחשוב שתחום הציר האופקי ותחום הציר האנכי חייבים להיות סימטריים. תופעה זו נצפתה בקרב תלמידי חטיבות בינים בעבודתם של החוקרים לינהרדט ועמיתיה (Leinhardt et al. 1990). לין וחבריו (Linn et al. 1987) מצביעים על הצורך בידע מוקדם הכולל: א. זיהוי כותרת הגרף, ב. מיקום הצירים, ג. הבנת התווית או המשתנים של הצירים ו-ד. יכולת לזהות את משמעות הגרף ויכולת להבין מגמות של הגרף, כגון, עליה, ירידה או יציבות. מחקר בקרב סטודנטים בקורס סטטיסטיקה מגלה שהידע המוקדם וניסיון העבר של הסטודנטים משפיע על יכולתם לבנות גרפים. סטודנטים בעלי ניסיון מתמטי גילו אסטרטגיות טובות יותר בקריאת גרפים וזיהוי המגמות המתוארות בגרפים (Fisher, 1992). ניתן לראות בתפיסה מוטעית זו אנלוגיה בלתי מודעת ליישום מוסכמות של כתיבה; עושים רשימות מלמעלה למטה, כותבים מימין לשמאל.

ז. שרטוט הגרף מסקאלת ציר X

איור 8: מציג שרטוט גרף מסקאלת ציר X.

70				4
80				
90			3	
		2		
	1			
100				

0.9 אחוז מן השרטוטים השגויים הראו שרטוט גרף על פי סקאלת ציר X כאשר ערכי הסקאלה מקבלים גובה שונה לפי התאמת ערכי הנקודות בציר Y. הדוגמא באיור 8 ממחישה זאת. במקום להשתמש בנקודות על מערכת הצירים כמייצגות של זוגות סדורים, התאים הנבדק לכל ציון בציר Y את הערך

מציר X המייצג את שעות הלימוד שלו תוך כדי סידור מתאים של הגובה של ערך ציר ה- X וכיוון הסקאלה של ציר Y לקבלת גרף עולה. המעניין בתפיסה מוטעית זו הוא החשיבות של הדרוג העולה של ערכי ציר X , שלצורך שמירתם הנבדקים ממציינים התאמות משלהם.

תפיסה זו מעידה על ליקוי בהבנת המושג משתנה ותרומתו להצגה גרפית חזותית וקושי לראות קשר פונקציונלי בין שני משתנים. תלמידים מתקשים להבין שמשתנה נתון יכול לקבל ערכים שונים. המושג משתנה הוא מושג יסודי בהבנה של יחסים פונקציונליים וייצוגים גרפיים. יש משתנים רציפים בעלי הקשר מסוים ויש משתנים מופשטים. המשתנים המופשטים הם מספרים, שאינם קשורים למציאות כלשהי. המשתנים הרציפים המופיעים בדרך כלל בהקשר של גרפים, מתייחסים על פי רוב לטמפרטורה, אורך, מהירות, גיל, משקל וזמן. משתנה הזמן יוצא דופן בשל הופעתו כבדיד או כרציף לחלופין. יש נקודות השקה בין העבודה הנוכחית לבין עבודתו של קוג'מן ביחס לתפיסת המושג משתנה על ידי תלמידים בגילי 11-16 (Kucheman, 1978). למשל, הקושי לתפוס משתנה כמבטא הכללה, ולמעשה יכול לקבל ערכים שונים. מכאן נובע גורם נוסף, הכשל בביצוע אינטגרציה של ידע (ראו גם שוורץ, 1989). תרגום המידע עשוי להתבצע בצורה לא נכונה בשל בלבול בסימן או בשל ראייה מוגבלת של צורות גרפים שונות או בשל ריבוי מוקדי תשומת הלב במהלך בניית גרף. בראש ובראשונה דורשת הבנייה מיקוד במערכת הקואורדינטות, כלומר, הצירים, כינויים ודירוגיהם. בנוסף יש צורך במיקוד בגרף ובמרכיביו. למשל, אם המשימה דורשת בניית גרף סכמתי ההתמקדות תהיה בצורת הגרף ובכיוונו הכללי. לעומת זאת, משימה הדורשת בניית גרף כמותי תתמקד בנתונים שמציג הגרף יותר מאשר בכיוונו הכללי. דרישת הייצוג הגרפי לאינטגרציה של ידע וריבוי מוקדי תשומת הלב מביאה תלמידים אחדים להצטמצם ולהתמקד בחלק ממרכיבי הגרף בלבד.

ח. תפיסת הצירים עצמם כמייצגים את הגרף

איור 9: מציג את הצירים עצמם כמייצגים גרף ובכל ציר אחד בלבד.



0.9 אחוז מהשרטוטים השגויים התייחסו אל הצירים עצמם כמייצגים את הגרף, לדוגמא, ניתן לראות את הגרפים של דני וגלית באיור 9. בדוגמאות אלה בנוסף לצירים עצמם יש זוג ערכים אחד בלבד והוא ההתאמה בין הערך המכסימלי בציר Y לערך המתאים לו בציר X.

בסוג זה של תפיסה מוטעית ניכרים קשיי התלמידים בהשלכת יחסים מן הכוח אל הפועל. ניכר כאן קושי להתאים לכל אחד מהפרמטרים את התפקיד החזותי שלו, וקושי במתן משמעות לפרמטרים השונים. תופעות דומות נצפו בשכבות גיל גבוהות במחקרים אחדים (Cieply, 1993; Goldenberg, 1988). התלמיד מכיר את מבנה מערכת צירים, אך נתקל בקשיי ביצוע הלכה למעשה, ומתקשה בהרכבת מערכת היחסים בין המרכיבים השונים. תופעה זו מצביעה על ארגון לקוי של הסיטואציה ומעידה על בלבול בין מרכיבי הסיטואציה, הקונטקסט, הגרף והסידור שבו משתמשים בגרף. אחד הנבדקים אף טרח להבהיר את הבעיה בציינו, כי "לדני וגלית אי אפשר לשרטט גרף, כי אי אפשר לדעת כמה הם מקבלים כאשר הם לומדים פחות או יותר". ריבוי מוקדי תשומת הלב ובעיה במתן משמעות לפרמטרים מביאה תלמידים להתמקד ברכיב החוזר בגרף הוא מערכת הצירים ולבחור פריט קצה מכלל הנתונים.

מסקנות, השלכות והצעות למחקר עתידי

נשאלה השאלה כיצד מתמודדים תלמידי כיתה ה עם משימות שרטוט גרפים המתבססות על מיומנויות של מעבר מייצוג מילולי לייצוג גרפי ומעבר מייצוג מספרי לייצוג גרפי (עולה/יורד, מספרי/לא-מספרי). מן הממצאים עולה, כי הנבדקים התקשו במשימות השרטוט הדורשות מיומנויות של מעבר מייצוג מילולי לייצוג גרפי יותר מאשר במשימות השרטוט הדורשות מיומנויות מעבר מייצוג מספרי לייצוג גרפי. כמו כן, ניכר הבדל ברמת ההתמודדות של תלמידים בבניית גרפים עולים/יורדים. היה קושי גדול יותר של הנבדקים לבטא את הגרף היורד בשרטוט מאשר את הגרף העולה. תופעה זו התגלתה במשימות שעניינן מעבר מייצוג מילולי לייצוג גרפי ובמשימות שעניינן מעבר מייצוג מספרי לייצוג גרפי. אפשר לראות הקבלה לתופעה זו בקרב ילדים בגיל הרך השולטים יפה בספירה קדימה: 1, 2, 3, אך מגלים קשיים בספירה אחורה: 4, 3, 2. במילים אחרות התמונה המצטיירת מצביעה על שני תנאים המהווים קושי ללומדים האחד שרטוט של גרף יורד והשני שרטוט של גרף מילולי שלא מכיל נתונים מספריים. כאשר שני התנאים הללו מצטרפים יחד במשימה אחת הקושי של התלמידים גדל פי כמה, כפי שאכן ראינו בהישגיהם למשימה רביעית של בניית גרף (איור 1). הוראה, תיווך וסביבת למידה טכנולוגית מתאימים

עשויים לצמצם אי-הבנות מסוג זה. יתכן שתהליך הלמידה עצמו יוצר תפיסות מוטעות. אנו עדים למשל, לתופעה הנפוצה של כתב ראי בקרב ילדים צעירים בתחילת דרכם בלימוד אופן הכתיבה של אותיות הא"ב. גם במקרה זה ניתן לשאול האם הלמידה היא שיצרה את התפיסה המוטעית, אבל השאלה במקרה זה האם תהליך למידה אחר יוצר פחות תפיסות מוטעות, שהרי אין להניח שנימנע מלמידה כלל. החוקרים הארט וחבריו למשל, ממליצים ללמד תלמידים בגילי 9-12 את תיאוריית הגרף בייצוגים שונים, מטריצות, סדרות, רקורסיות ואלגוריתמים (Hart, Maltas & Rich, 1990), כדי ליצור תשתית טובה של ידע מוקדם והכנה למתמטיקה גבוהה בעתיד, ולמנוע הצטברות של תפיסות מוטעות בקרב תלמידים צעירים הנחשפים באורח בלתי פורמלי לייצוגים גרפיים באמצעות הפרסומים והמידע בכלי התקשורת למיניהם. לגבי למידת נושא הגרפים, תוצאות ניתוח שונות במדידות חוזרות מציגות את יתרונה של סביבת למידה טכנולוגית בלוגו על פני סביבת למידה טכנולוגית של עיבוד תמלילים. מכל מקום דרוש מחקר נוסף להבהרת נקודה זו.

לכאורה, לאור הקשיים שהתגלו בקרב תלמידים צעירים ניתן לטעון, כי זהו שלב מוקדם מכדי להכניס בו יחידת לימוד בנושא פרשנות גרפים ובניית גרפים. אולם, במחקר הנוכחי נמצא, כי הנבדקים הצעירים (תלמידי כיתות ה) התמודדו בהצלחה לא-מעטה עם משימות בניית גרפים הדורשות מיומנויות קוגניטיביות שונות ורמת הפשטה גבוהה, אותם הביעו בתוכנית מורכבת בלוגו המצריכה חשיבה לוגית וסיסטמטית. ייתכן, כי הוראת יחידת לימוד שעניינה הצגת נתונים שאספו התלמידים על ידי גרפים בלוגו המתארים תופעות בסביבתם הקרובה, תרמה לתלמידים הצעירים לעשות קפיצה מחשיבה מתמטית מוחשית לחשיבה מתמטית ויזואלית מופשטת. ניכרת ההקבלה בין פעילויות לוגו לבין פעולת החשיבה. כאשר הילד מפתח את כושר החשיבה שלו, הוא בונה תבניות חשיבה תוך כדי חקר העולם הסובב. על כן, כשהוא עומד בפני אתגר של מצב חדש או בעיה, הוא מצרף מושגים שכבר קנה בהם שליטה, כדי ליצור תובנה חדשה שיוכל ליישם אחר כך בבואו לחשוב על סיטואציה דומה, באותו אופן בו הוא יכול לבנות בלוגו הליך חדש על בסיס הליכים שכבר בנה קודם. יתר על כן, הלומדים נדרשים לפקח על הבנת תפקודי פקודות, הליכים ותת-הליכים, לפקח על רמת הביצוע, לנקוט אסטרטגיות תיקון, כגון, מיפוי, איתור שגיאות, עריכה מחדש, הפעלה ניסויית, הפקת לקחים והערכה מסכמת. במהלך הפיקוח התלמידים שואלים שאלות חקר ברמות שונות (ראו פירוט בתיאור התוכנית הממוחשבת). ביסוס לכך ניתן לראות במחקרם של קאפח ושל מברך וקאפח (Mevarech & Kapa, 1996; Kapa, 1999). בניגוד לסביבות ממוחשבות סגורות בתחום הגרפים (e.g. Roseberry & Rubin, 1989; Brown et al. 1992), אשר מפעילות מיומנויות של הבנת גרפים וידע לקרוא את נתוני הגרף, הרי סביבת ההתערבות הנוכחית

מבוססת לוגו מפעילה מיומנויות הקשורות בבניית גרפים מראשיתם, כלומר החל מתכנון מערכת הצירים עליה ימוקם הגרף. סביבה זו שהינה ידידותית ופשוטה להפעלה, מאפשרת להורות את הנושא כבר בבית הספר היסודי בניגוד למצופה על פי תוכנית הלימודים.

שאלות מהותיות חשובות שעמדו על הפרק במחקר הנוכחי הן, אילו תפיסות מוטעות מגלים תלמידים במשימות של בניית גרפים מייצוגים שונים? אילו תהליכים קוגניטיביים מלווים תפיסות מוטעות אלה ומהן הסיבות האפשריות להיווצרותן? כדי לענות על שאלות אלה לוקטו השרטוטים השגויים של התלמידים, מוינו ונותחו. תיאור התפיסות המוטעות נעשה מתוך התייחסות מובחנת של תהליכים מנטליים מעורבים. בהתבסס על הניתוח והדיון המובא בפרק התוצאות תוצג טבלת סיכום של שמונה תפיסות מוטעות, התהליכים הקוגניטיביים המעורבים בהן וסיבות אפשריות להתהוותן.

סיכום של שמונה תפיסות מוטעות, התהליכים הקוגניטיביים המעורבים בהן וסיבות אפשריות להתהוותן.

תיאור התפיסה המוטעית	תהליכים קוגניטיביים מעורבים	סיבות אפשריות להתהוותן
א. היפוך נתוני הסקאלה של הציר האופקי או של הציר האנכי	שימור דימוי מנטלי של גרף לינארי עולה	חשיפת יתר לתבנית הגרף הלינארי העולה, ואי-חשיפה מספקת לתבניות שונות של גרפים והדרך בה הם מייצגים מידע
ב. תפיסת הגרף כצורה טבלאית	ליקוי בתרגום המידע הנומרי להצגה גרפית חזותית של נקודות במרחב גיאומטרי דו-ממדי, וליקוי בהבנה של השתנות בו-זמנית	אנלוגיה שגויה לטבלאות התאמה הנלמדות בשיעורי החשבון
ג. תפיסת הגרף כהתאמה גרפית בין ערכי ציר X ו- Y , חיבור נקודות קרטיזי בלבד	חוסר הבנה של המושג שיפוע והקשר בין השיפוע לבין הסימן	אנלוגיה שגויה למשימות שגורות אחרות של מתחת קווים בין... לבין...
ד. הצגת גרף כנקודה אחת על פני מערכת הצירים	ליקוי בהתייחסות סימולטנית אל מערכת קואורדינטות אורתוגונלית כמייצגת ריבוי פריטי מידע. קושי בשימור המאפיינים הקבועים למרות שינויים במאפיינים אחרים	מורכבות הגרף ודחיסותו כמייצג מידע. כדי להתמודד עם דחיסות זו התלמיד מנסה 'לדלל' את המידע.
ה. תפיסת הגרף כאיור	אנלוגיה למציאות המוחשית	ההפשטה הנדרשת בייצוג הגרף שהינו חזותי ואף על פי כן מופשט

ו. עיוות סולם המדידה	ליקוי בהבנת פעולת הדרוג והשיום של מערכת צירים	אנלוגיה ליישום מוסכמות של כתיבה: עושים רשימות מלמעלה למטה, כותבים מימין לשמאל
ז. שרטוט הגרף מסקאלת ציר X	ליקוי בהבנת המושג משתנה ותרוממו להצגה גרפית חזותית וקושי לראות קשר פונקציונלי בין שני משתנים	דרישת הייצוג הגרפי לאינטגרציה של ידע וריבוי מוקדי תשומת הלב. התלמיד מנסה להצטמצם ולמקד את תשומת לבו בחלק ממרכיבי הגרף בלבד.
ח. תפיסת הצירים עצמם כמייצגים את הגרף	בלבול בין מרכיבי הסיטואציה, קושי להתאים לכל אחד מהפרמטרים את התפקיד החזותי שלו	ריבוי מוקדי תשומת הלב ובעיה במתן משמעות לפרמטרים השונים. התלמיד מתמקד ברכיב החוזר בגרף - מערכת הצירים, ובוחר פריט קצה יחיד מכלל הנתונים.

התפיסות המוטעות א, ג, ד, ו- ה מוצגות בטבלה תואמות לתפיסות שגויות שנמצאו בספרות בקרב תלמידים בוגרים (Bell et al. 1987; Leinhardt et al. 1990; Mvarech & Kramarski, 1997) (ב) השוואה בין המתואר בספרות באשר לסוגי התפיסות המוטעות לבין אלו המתוארות בטבלה מראה כי בקרב ילדים צעירים יש יותר תפיסות מוטעות מאשר בקרב ילדים בוגרים. אולם, בקרב תלמידים בוגרים יש מגוון רחב יותר של גרפים שגויים בכל סוג של תפיסה מוטעית מאשר בקרב תלמידים צעירים. שמונה תפיסות מוטעות אלה מייצגות למעשה כשלים בהתמודדות עם שלושת הרמות של הבנת גרפים על פי וינר (Wainer, 1992). רמות אלה דורשות הסתכלות על גרף כמייצג מגמות ותנודות של תופעות שונות ומאפשרות ניבוי והסקה. רוב הליקויים המפורטים לעיל נובעים ככל הנראה מאינטראקציה אסוציאטיבית בין המשימה הנדרשת ובין האינטואיציות של התלמיד בגוף הידע הנידון. יתר על כן, ידוע כי ילדים בגילי 9-10 מגלים תפיסה אגוצנטרית של המרחב (Fay & Mayer, 1987), שלעיתים יוצרת התנגשות ואי התאמה למשימה הלימודית ומהווה מקור להיווצרות של תפיסות מוטעות.

התפיסות המוטעות מוצגות בסדר יורד של שכיחויותיהן, כלומר, הראשונה היא בעלת השכיחות הגבוהה ביותר (13.9%) והשמינית בה השכיחות הקטנה ביותר (0.9%). מעניין לציין, כי דרוג שכיחויות זה נמצא ביחס הפוך לדרוג הקשיים הקוגניטיביים המעורבים בתפיסות מוטעות אלה והסיבות האפשריות להתהוותן. בעוד שהתפיסות המוטעות השכיחות יותר נובעות בעיקרן מליקוי קוגניטיבי מזערי יחסית הנגרם ככל הנראה מהעברה שלילית של חומר נלמד. לעומתן, התפיסות המוטעות הנדירות יחסית נובעות מקשיים קוגניטיביים מהותיים יותר, ואף הסיבות המוצעות להתהוותן נוגעות

בדרך-כלל למורכבות הייצוג הגרפי ודרישתו לתשומת-לב מרובת מוקדים. לעניות דעתי, תופעה זו לכשעצמה יש בה כדי להעיד על התקדמות בלמידה וביכולת ההתמודדות עם שרטוט גרפים יחסית למצב התחילי לפני הלמידה בו רק 9 תלמידים ניסו להציג שרטוט כלשהו (ראו איור 1). יתכן, שתפיסות אלה מהוות עדות על שלבי התפתחות של הבנייה הגרפית בקרב ילדים צעירים תלמידי בית ספר יסודי גם לאור העובדה, שחלק מסוגי הטעויות המתוארות לעיל לא נמצאו בקרב תלמידים בוגרים (ראו למשל, Leinhardt et al. 1990; Mevarech & Kramarski, 1997).

השלכות יישומיות

לסיווג ובחינה של תפיסות מוטעות בבניית גרפים מייצוגים שונים יש השלכה ישירה על עבודתו של המורה למתמטיקה. מורה אשר יהיה מודע לתפיסות המוטעות בדרגותיהן השונות ולתהליכים הקוגניטיביים הכרוכים בהן, יוכל ליצור תובנה טובה אצל תלמידיו באמצעות תיווך מתאים, כדי להקטין ולשרש את התפיסות המוטעות בקרב תלמידיו. עמידה ראויה על הסיבות להתהוותן מכוונת ומנחה את ההוראה והלמידה ומשפרת אותן. ביחס לבניית גרפים ראוי לקבל את המלצתו של ג'אנביי (Janvier, 1981) להציג לתלמידים גרפים איכותיים של מצבים קונקרטיים תוך ראייתם בצורה כוללת במקום כאוסף נקודות, ולעודד תלמידים להתייחס לגרף בכללותו כביטוי ליחס בין שני משתנים המשתנים בו-זמנית. בנוסף, ראוי להנחות תלמידים לבטא את היחס בין שני המשתנים במילים יותר מאשר במספרים. הנחיה זו ניתנת ליישום כבר בגילים צעירים. השלכה נוספת מתייחסת למוסדות להכשרת מורים ולמורי המורים למתמטיקה ולמדע. מומלץ להם לעמוד על תופעות אלה ולדון בהם עם המתכשרים להוראה על מנת שתלמידיהם, המורים לעתיד, יוכנו כראוי לעבודתם. כמו כן, עבודה זו מהווה המלצה למורים להכיר את תלמידיהם כלומדי מתמטיקה, להתבונן בעבודותיהם, להאזין לשיח המתמטי שלהם ולהיעזר במורים עמיתים לניתוח שגיאות התלמידים משום שכך ניתן להיערך טוב יותר להוראה מתמטית המסייעת לשרש תפיסות מוטעות.

הצעות למחקר עתידי

בעבודה הנוכחית נבדקה יכולתם של תלמידי כיתה ה' לבנות גרפים מסוגים שונים (עולים/יורדים, מספריים/לא מספריים) בסביבת למידה ממוחשבת בלוגו. עבודות אחרות התמקדו בפעילות תלמידים בסביבה קונקרטית מתוך הדגשים שונים (Brutlag & Maples, 1992; Schultz, 1991). בעבודות אלה התלמידים התבקשו להציג אינפורמציה באמצעות גרפים, טבלאות ונוסחאות. עבודה עתידית ראוי

שתעמת גישות אלה, תבדוק איזו סביבה תורמת יותר לתלמידים ליצור קישורים מתמטיים ותובנה גרפית חזותית והאם יש מקום לשילוב שתי הגישות או שמא לבנותם ברצף דידקטי על פי חתך גילי. אפשרות אחרת הנה לעמת בין סביבות גרפיות ממוחשבות שונות, כגון זו המתוארת בעבודתם של בראון וחבריו (Brown et al. 1992) וסביבת לוגו, תוך השוואתן ביחס להשפעה על פיתוח מיומנויות ויזואליות וגרפיות של תלמידים. במחקר הנוכחי, בניגוד למחקרים שנסקרו במבוא התיאורטי, נעשה ניסיון להבחין בין תיאור התפיסה השגויה ושייומה לבין תהליכים קוגניטיביים וסיבות אפשריות המהווים מקור והשראה ליצירתן. מחקר עתידי ראוי שיתמקד בקונטקסט של התפיסות המוטעות והפרשנות המוצעת סביב התהליכים הקוגניטיביים ויערוך השוואה במסגרת דיסציפלינות שונות. כמו כן, כדאי לבדוק את מידת העקביות של הפרט בסוגי הטעויות והאם למידה מתווכת גורמת לשינוי בסוגי הטעויות השכיחים לפני הלמידה ולאחריה.

מקורות

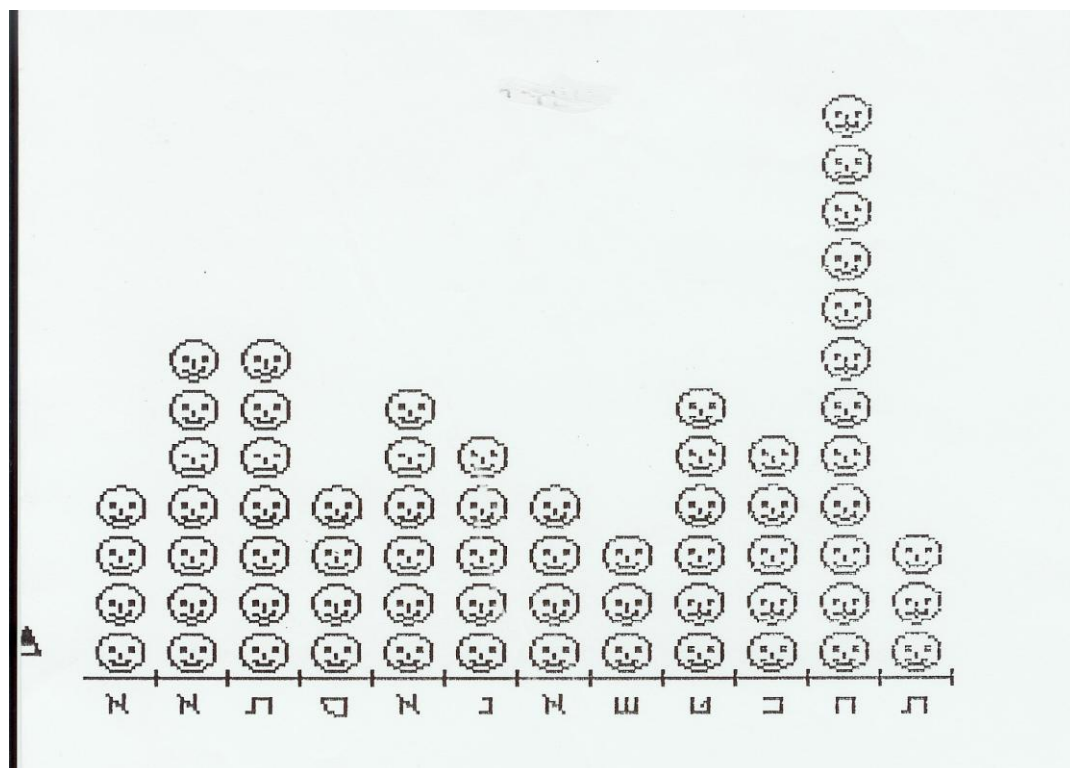
- גבעון, י' (1996). אפיון הכלים הפתוחים. בתוך ז' מברך וחטיבה, נ' המחשב בבית הספר. הוצאת שוקן, תל-אביב.
- מברך, ז' וקרמרסקי, ב' (1989). סטטיסטיקה בעזרת הצב. המכון לקידום אינטגרציה חברתית במערכת החינוך, בשיתוף עם משרד החינוך, התרבות והספורט.
- משרד החינוך, התרבות והספורט. (1992). מחר 98. הוועדה העליונה לחינוך מדעי וטכנולוגי, ירושלים.
- קאפח, א' (1993). לוגו כאמצעי לפיתוח מטה-קוגניציה, חשיבה מתמטית ותפיסה מרחבית. עבודת מאסטר אוניברסיטת בר-אילן, רמת גן.
- קאפח, א' (1997). תאור נתונים בגרפים – מבט קוגניטיבי. שנתון תלפיות תשנ"ז, 170-179.
- קאפח, א' (2002). השפעת הנחיה ממוחשבת על תפקוד מטה-קוגניטיבי בתהליך פתרון בעיה מתמטית, מגמות, מ"ב, 121-103.
- Addicks, T. (1985). Logo in the mathematics curriculum. Mathematics Teacher, 78, 424-428.
- Aspinwall, L., Show, K. L. & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. Educational Studies in Mathematics, 33, 301-317.
- Attali, Y. & Goldschmidt, C. (1996). The effects of component variables on performance in graph comprehension tests. Journal of Educational Measurement, 13(1), 93-105.
- Bell, A., Brekle, G. & Swan, M. (1987). Diagnosing teaching: 4 graphical interpretation. Mathematics Teaching, 119, 56-59.
- Bell, A. & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. For the Learning of Mathematics. 2, 34-42.
- Brown, K. G. (1985). Logo and friese patterns. Mathematics in school, November, 34-39.
- Brown, C., Fell, H., Proulx, V. K. & Rasala, R. (1992). Using visual feedback and model programs in introductory computer science. Journal of Computing in Higher Education, 4(1), 3-26.
- Brutlag, D. & Maples, C. (1992). Making connections: Beyond the surface. The Mathematics Teacher, 85, 230-235.

- Cieply, J. F. (1993). Parametric equations: Push 'em back, Push 'em back, why back! The Mathematics Teacher, 86, 470-474.
- Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11, 77-87.
- Cohen, J. (1977). Statistical power analysis for the behavioral sciences. New York: Academic Press.
- Donley, H. E. & George, E. A. (1993). Hidden behaviors in graphs. The Mathematics Teacher, 86, 466-468.
- Everd, L. & Uy, F. (1999). Using performance graphs to assess problem solving. Mathematics Teaching in the Middle School, 4, 252-254.
- Fay, A. L. & Mayer, R. E. (1987). Children's naive conceptions about Logo graphics commands. Journal of Educational Psychology, 79, 254-262.
- Fisher, M. A. (1992). Categorization, or schema selection in graph comprehension. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA, April 20-24.
- Goldenberg, P. E. (1988). Mathematics, metaphors and human factors: Mathematical, technical and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. Journal of Mathematical Behavior, 7, 135-173.
- Haigh, W. E. (1989). Statistical graphs and logo. School Science and Mathematics, 89, 228-238.
- Hart, E. W., Maltas, J. & Rich, B. (1990). Teaching discrete mathematics in grade 7-12. Mathematics Teacher, 83, 362-367.
- Janvier, C. (1981). Use of situations in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 12, 113 - 122.

- Kapa, E. (1999). Problem solving, planning ability and sharing processes with LOGO. Journal of Computer Assisted Learning, 15, 73-84.
- Kucheman, D. (1981). Algebra. In J. Hart. (Ed.), Childrens' Understanding of Mathematics: 11-16. (pp. 102-119). London: Murray.
- Lehrer, R. (1986). Logo as a strategy for developing thinking. Educational Psychologist, 21(1), 121-137.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. Review of Educational Research, 60, 1-64.
- Linn, M. C., Layman, J. & Nachmias, R. (1987). Cognitive consequences of microcomputer-based laboratories: Graphing skills development. Contemporary Educational Psychology, 12, 244-253.
- Markovitz, Z., Eylon, B. & Bruckheimer, M. (1983). Functions linearity unconstrained. In R. HersHKovitz (Ed.). Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, (pp. 271-277). Weizman Institute of Science, Rhovot, Israel.
- Mevarech, Z. R. & Kapa, E. (1996). The effects of a problem-solving based LOGO environment on children's information processing components. British Journal of Educational Pseychology, 66, 181-195.
- Mevarech, Z. R. & Kramarski, B. (1997). From verbal description to graphic representation: Stability and change students alternative conceptions. Educational Studies in Mathematics, 32, 229 - 263.
- Meyer, J. (1997). A new look at an old study on information display: Washborne (1927) reconsidered. Human Factors, 39. 333-340.
- Nesher, P. (1987). Towards an instructional theory : The role of students' misconceptions. For the Learning of Mathematics, 7, 33-40.

- Papert, S. (1980). Mindstorms, children, computers, and powerful ideas. New York: Basic Books.
- Rieber, L. (1996). Animation as feedback in a computer-based simulation: Representation matters. Educational Technology Research and Development, 40(1), 5-22.
- Roseberry, A. S. & Rubin, A. (1989). Reasoning under uncertainty: Developing statistical reasoning. The Journal of Mathematical Behavior 8, 205-221.
- Rosnick, P. & Clement, J. (1984). Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. Journal of Mathematical Behavior, 3, 2-27.
- Schultz, J. E. (1991). Teaching informal algebra. Arithmetic Teacher, 38(9), 34-37.
- Schwarz, B. (1989). The use of microworld to improve ninth graders concept image of a function: The triple representation model curriculum. Thesis for the degree of doctor of philosophy, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel.
- Shama, G. & Dreyfus, T. (1994). Visual, algebraic and mixed strategies in visually presented linear programming problems. Educational Studies in Mathematics, 26, 45-70.
- Shulte, A. P.(1984). Plotting and predicting from pairs. Mathematics Teacher, 77, 422 - 435.
- Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. Educational Researcher, 21, 14-23.
- Yerushalmy, M. (1991). Students perceptions of aspects of algebraic function using multiple representation software. Journal of Computer Assisted Learning, 7, 42-56.
- Yerushalmy, M. & Gafni, R. (1991). The effect of graphic representation: An experiment involving algebraic transformation. In The Proceeding of the 15th annual meeting of the Psychology of Mathematics International Group (PME). (pp. 277-372), Assisi, Italy.

נספח 1: עבודה של תלמידה בתוכנית הלמידה בלוגו המציגה פיקטוגרמה של שכיחות התלמידים בכיתה שנולדו בכל אחד מחדשי השנה (תשרי, חשוון ...).



נספח 2 : תוצאות ניתוח שונות במדידות חוזרות בבניית גרפיים מייצוגים שונים

המשתנה	df	בנייה א	בנייה ב	בנייה ג	בנייה ד	בנייה כולל
טיפול	1	0.4	0.07	0.6	0.00	0.31
זמן	1	0.4	0.9	0.7	0.5	0.05
טיפול*זמן	1	6.5**	9.7***	5.8**	10.75***	14.75***

$p = 0.001$ *** $p = 0.01$ ** $p = 0.05$ *